

Les grands nombres

Représentation

Les nombres rencontrés en astronomie sont « astronomiques », défient l'imagination, mais notre but est d'essayer de voir en réalité ce que cela représente et jusqu'où peut-on aller. Nous allons vite nous rendre compte que nous n'allons pas aussi loin que nous le pensons.

Tout d'abord, comment représente-t-on les grands nombres. D'abord par le langage courant :

1 000 : mille, 1 000 000 : un million, 1 000 000 000 : un milliard

Après, nous n'avons plus beaucoup de moyens de nous exprimer : un milliard de milliards représente pour nous quelque chose que nous avons de la peine à imaginer, autrement dit l'infini. Remarquons qu'en ce sens, nous avons fait des progrès si nous pensons aux peuplades primitives qui ne connaissent que *un, deux et beaucoup* ou encore à nos ancêtres pas si lointains pour qui 777 représentait le symbole de l'innombrable !



Un billet de cent trillions de dollars zimbabwéens (soit 30 \$ en 2008, à l'époque où il a été émis). L'usage du mot trillion qui, ici, signifie 10^{12} est à déconseiller, car il n'a pas la même signification dans les pays de langue anglaise que dans le reste du monde.

Maintenant, il nous faut une manière symbolique, pas difficile à comprendre pour symboliser les grands nombres. La façon la plus simple est d'utiliser les puissances de 10 : 10^n que l'on énonce : 10 puissance n , ou, d'une façon plus précieuse : 10 exposant n . 10^n représente un 1 suivi de n zéros. Par exemple, 10^{41} représente un 1 suivi de 41 zéros tandis que 10^{42} représente un 1 suivi de 42 zéros. J'ai choisi cette exemple, non pas parce que je crois lecteur idiot (*horresco referens*), mais pour lui faire toucher du doigt que 10^{42} représente dix fois plus d'objets que 10^{41} . On grimpe ainsi assez vite dans l'échelle des grands nombres pour arriver à des nombres assez respectables sans que l'exposant n ne soit très élevé.

Pendant que nous y sommes, intéressons nous aux nombres très petits. 10^{-n} représente un 1 précédé de n zéros. Naturellement, il faut mettre une virgule entre le premier et le deuxième zéro. Par exemple :

$10^{-3} = 0,001$: un millième,
 $10^{-6} = 0,000\ 001$: un millionième,
 $10^{-9} = 0,000\ 000\ 001$: un milliardième.

Et si le chiffre en exposant est un zéro ? C'est bien simple : il représente un 1 suivi ou précédé d'aucun zéro, c'est-à-dire le chiffre un : $10^0 = 1$! C'est pas plus compliqué que ça !

Les scientifiques ont des préfixes pour nommer les nombres du genre 10^n ou 10^{-n} lorsque n est un peu grand, mais naturellement, on ne va pas très loin (jusqu'à $n = 24$). Ces préfixes commencent à être connus et utilisés par le grand public, au moins pour les premiers. Voici donc, à titre de curiosité leur liste :

- 10^3 : kilo (symbole : k). Par exemple : 1 km = 1 kilomètre = 1000 mètres
- 10^6 : méga (symbole : M). Par exemple : 1 M\$ = 1 méga dollar = 1 000 000 de dollars
- 10^9 : giga (symbole : G). Par exemple : 1 GeV = 1 giga électron-volt = 10^9 eV
- 10^{12} : téra (symbole : T). Par exemple : 1 To = 1 téra octet = 10^{12} octets
- 10^{15} : péta (symbole : P). Par exemple : 1 Pflop = 1 péta flop = 10^{15} flops
- 10^{18} : exa (symbole : E).
- 10^{21} : zetta (symbole : Z).
- 10^{24} : yotta (symbole : Y). Cela commence à faire beaucoup !

Le terme *kilo* vient du mot grec χίλιοι, qui signifie mille. Les termes *méga*, *giga* et *téra* sont des racines grecques qui signifient respectivement : *grand*, *géant* et *monstre*. Ils ont été introduits en 1960. Les derniers suffixes viennent également de racines grecques qui signifient 5, 6, 7, 8. Ils ont été introduits en 1975 (pour P et E) et en 1991 (pour Z et Y). Il faut tirer un coup de chapeau à nos édiles scientifiques, qui pour une fois, sont allés chercher des racines grecques et non pas le salmigondis américain. Un flop est un terme informatique qui représente une opération flottante par seconde (l'Eflop représente la puissance des plus grands ordinateurs existant actuellement, atteinte en 2016. Le Zflop va être difficile à atteindre). En 2013, la dette publique de la France était de 2 T€ (2 téra euros ou 2000 milliards d'euros) et le PIB mondial était de 80 téra dollars (T\$). Enfin le YJ (yottajoule) correspond en moyenne à la quantité d'énergie dépensée dans le monde au cours du XIX^e siècle.



Laurent de la Hire (1606-1656). Allégorie de l'arithmétique. Célèbre pour ses allégories des sept arts libéraux qui, outre l'arithmétique sont : l'astronomie, la géométrie, la musique, la grammaire, la dialectique et la rhétorique, représentées par d'accortes jeunes femmes, habillées à la mode grecque telle que l'on l'imaginait de son temps.

Les sous-multiples ont également leurs préfixes :

- 10^{-3} : milli (symbole : m). Par exemple : 1 mg = 1 milligramme = 0,001 gramme
- 10^{-6} : micro (symbole : μ). Par exemple : 1 μ s = 1 microseconde = 0,000 001 seconde
- 10^{-9} : nano (symbole : n). Par exemple : 1 nm = 1 nanomètre = 10^{-9} mètre
- 10^{-12} : pico (symbole : p). Par exemple : 1 pF = 1 picofarad = 10^{-12} farad
- 10^{-15} : femto (symbole : f). Par exemple : 1 fm = 1 femtomètre = 10^{-15} mètre
- 10^{-18} : atto (symbole : a)
- 10^{-21} : zepto (symbole : z)
- 10^{-24} : yocto (symbole : y). Ça fait pas beaucoup !

Le terme *milli* vient du latin *mille* : mille. Les termes *micro*, *nano* et *pico*, introduits en 1960 viennent respectivement du grec (pour les deux premiers) ou de l'italien (pour le troisième) et signifient *petit*, *nain* et *petit*. Les termes *femto* et *atto*, introduits en 1964, viennent du danois *femten* et *atten* qui veulent respectivement 15 et 18 à cause de 10^{-15} et 10^{-18} . Enfin *zepto* et *yocto*, introduits en 1991, viennent, par déformation, du latin *septem* et du grec οχτώ, huit. Remarquons *zetta*, mais *zepto*, *yotta*, mais *yocto*. Le nanomètre est l'ordre de grandeur de la dimension d'une molécule tandis que le *femtomètre* représente le diamètre d'un noyau atomique.

Les grands nombres en astronomie

a – Âge de l'Univers

Voici bien un domaine où l'on manipule des grands nombres. On nous dit, par exemple que le *big bang* débuta, il y a de cela 13,8 milliard d'années. Que voici un chiffre impressionnant ! Mais a-t-on réfléchi à ce que cela représente en termes de secondes. Sachant combien il y a de secondes dans une année, on calcule :

$$t = 3600 \times 24 \times 365,25 \times 13,8 \times 10^9 = 4,35 \times 10^{17} \text{ secondes}$$

De ce point de vue, l'Univers n'est pas si vieux que cela : 435 pétasecondes, ou mieux 0,435 exaseconde c'est la toute petite enfance (surtout devant l'infini) ! On peut obtenir un nombre plus élevé en comparant l'âge de l'Univers avec **le temps de Planck**. Le temps de Planck t_P est la plus petite durée que l'on puisse imaginer, durée en deçà de laquelle la notion de temps n'a plus aucune signification :

$$t_P = 5,39 \times 10^{-44} \text{ seconde,}$$

$$t = 8,07 \times 10^{60} t_P$$



Candidates au titre de Miss Univers : Comme quoi tout est relatif. Si ces candidates remplissent tous les critères pour l'attribution du titre au XXI^e siècle, elles se feraient toutes recalser si nous étions au XVIII^e siècle. Qu'en pensent les habitants d'Andromède ?

b – Dimensions de l'Univers

Si on veut aller un peu plus loin, on peut se demander à quelle distance se trouve un astre dont la lumière a mis 13,8 milliards d'années à nous parvenir. Sachant que la lumière parcourt 300 000 km/s, ou plus exactement 299 492 458 m/s, on a exactement :

$$d = 299\,492\,458 \times 4,35 \times 10^{17} = 1,30 \times 10^{27} \text{ mètres}$$

Là, on est à la limite de ce que l'on peut énoncer : 1300 yottamètres. Plus grand, on n'a plus de mots pour le dire. En réalité, l'Univers visible est un peu plus grand que cela. En effet, lorsque nous voyons un objet situé à 10 milliards d'années-lumière, nous le voyons dans l'état dans lequel il était, il y a de cela 10 milliards d'années. Pendant ce temps, il s'est encore éloigné du fait de la dilatation de l'espace et l'on estime, qu'en 10 milliards d'années, l'espace s'est dilaté trois fois, de telle sorte qu'il est actuellement situé à 30 milliards d'années-lumière. Le rayon de notre Univers visible est donc trois fois celui que nous venons de calculer, soit :

$$r = 3,90 \times 10^{27} \text{ mètres}$$

Cela ne change bien évidemment pas l'ordre de grandeur, puisque l'exposant du chiffre 10 n'a même pas changé. Comme unité de mesure du rayon de l'Univers, on peut prendre la **longueur de Planck l_P** , longueur en deçà de laquelle la gravité commence à produire des effets quantiques, ôtant toute signification à la notion de longueur :

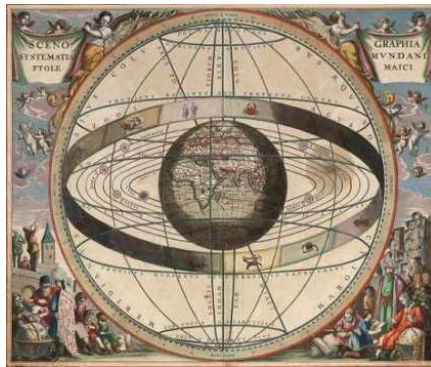
$$l_P = 1,62 \times 10^{-35} \text{ mètre,}$$

$$r = 2,41 \times 10^{62} l_P$$

c – Masse de l'Univers

Si l'on veut des nombres plus importants, il ne faut pas regarder les distances, mais plus exactement les masses. Quelle doit bien pouvoir être la masse de l'Univers visible ? Or cette masse est étonnement facile à calculer et mieux, toutes les méthodes inventées pour peser l'Univers, des plus simples aux plus complexes, conduisent au même résultat. Voyons les méthodes les plus simples :

Notre soleil pèse 2×10^{30} kg et il y a typiquement 100 milliards d'étoiles (10^{11}) dans notre galaxie, soit 2×10^{41} kg pour la masse de la Galaxie (une galaxie pèse entre 10^{10} et 10^{12} kg). Comme l'Univers visible compte 2000 milliards (2×10^{12}) de galaxies, sa masse totale visible serait de 4×10^{52} kg. Comme la matière baryonique est estimée à deux fois la masse de toutes les galaxies et que, matière noire et énergie noire entrent pour 95 % de la masse de l'Univers, on obtient une masse totale de $1,6 \times 10^{55}$ kg.



L'Univers selon Ptolémée !



Une galaxie, c'est toujours beau à voir !

Voici un autre raisonnement : notre Univers est approximativement plat, c'est-à-dire que sa densité réelle est approximativement égale à la densité critique. Or, la densité critique est de 10^{-26} kg/m³ (soit environ 5 atomes d'hydrogène par mètre cube). En multipliant le volume de l'Univers visible (dont le rayon est, nous venons de le voir : $3,90 \times 10^{27}$ m), nous obtenons :

$$m = \frac{4}{3} \pi (3,90 \times 10^{27})^3 \times 10^{-26} = 2,5 \times 10^{56} \text{ kg}$$

Ce résultat ($2,5 \times 10^{56}$ kg) est certainement plus précis que celui obtenu par le comptage des galaxies ($1,6 \times 10^{55}$ kg), mais l'ordre de grandeur des deux résultats est le même. Comme unité de mesure de la masse de l'Univers, on peut prendre **la masse de Planck**, mais contrairement au temps de Planck et à la longueur de Planck, la masse de Planck m_P a un ordre de grandeur plus familier. Elle correspond à la masse d'un petit grain de sable :

$$m_P = 2,18 \times 10^{-8} \text{ kilogramme}, \quad m = 1,15 \times 10^{62} m_P$$

Remarque : Tiens, l'âge de l'Univers t , le rayon de l'Univers r et la masse de l'Univers m sont à peu près égaux à **10^{62} fois** respectivement le temps de Planck t_P , la longueur de Planck l_P et la masse de Planck m_P ! Comme c'est bizarre ! Vous avez dit bizarre ?

A la réflexion, ce n'est pas si bizarre que cela, c'est même normal, mais rentrer dans de telles considérations nous entrainerait trop loin ! Si nous ne trouvons pas des chiffres rigoureusement égaux, c'est en raison des incertitudes dans l'évaluation du rayon et de la masse de l'Univers.

L'âge de l'Univers bénéficie d'une meilleure estimation (actuellement $13,798 \pm 0,037$ ans ou encore $(4,354 \pm 0,012) \times 10^{17}$ secondes, chiffre d'ailleurs déduit des données du satellite artificiel *Planck*, le bien nommé !

d – Quantité de matière dans l'Univers

Tout étudiant sait qu'il y a $6,02 \times 10^{23}$ molécules dans une mole¹, c'est-à-dire dans 18 g d'eau ou dans 1 g d'hydrogène. Pour être plus réaliste, disons qu'il y a sensiblement 10^{24} molécules dans un (grand) verre de whisky ou qu'il y a 6×10^{26} atomes dans 1 kg de masse solaire. Combien y a-t-il d'atomes dans tout l'Univers ?

Sachant qu'il y a 2×10^{23} masses solaires dans l'Univers, il y a donc :

$$n = 6 \times 10^{26} \times 2 \times 10^{30} \times 2 \times 10^{23} = 2,4 \times 10^{80} \text{ atomes}$$

Nous sommes maintenant arrivés au bout de notre voyage parmi les grands nombres de l'Univers et nous voyons à la réflexion que ces nombres ne sont pas si impressionnants que cela. S'il y a (tout de même) 10^{24} molécules dans 30 cm^3 d'eau, il n'y a *que* 10^{80} atomes dans l'ensemble de l'Univers.

Remarque : Pour nous rendre compte que nous sommes un peu ridicules avec nos 10^{80} atomes, et nous ramener à un peu de modestie, il suffit de savoir que le plus grand nombre premier connu, découvert en 2016, vaut ($2^{24\ 207\ 281} - 1$), ce qui représente un nombre contenant 10 524 905 chiffres (en gros, un 1 suivi de dix millions de zéros) !

Les petits nombres en Astronomie

Ces chiffres, à la différence des grands nombres rencontrés ci-dessus, ne sont pas intéressants par leur valeur, mais par les comparaisons qu'ils permettent. Nous allons nous intéresser aux densités, c'est-à-dire à la quantité de matière contenue dans l'unité de volume. Pour cela, commençons à voir l'ordre de grandeur des densités qui nous entourent.

Pour les corps condensés :

Les métaux les plus lourds ont une masse volumique de $20\ 000 \text{ kg/m}^3$

Les roches ont une masse volumique moyenne de $5\ 000 \text{ kg/m}^3$

L'eau a une masse volumique de 1000 kg/m^3 (*1kg/litre !*)

Pour les gaz

La masse volumique au centre du soleil est $150\ 000 \text{ kg/m}^3$

La masse volumique moyenne du soleil est de $1\ 408 \text{ kg/m}^3$ (un peu plus que celle de l'eau)

La masse volumique de l'air sous 1 bar est de $1,3 \text{ kg/m}^3$

La masse volumique de l'air sous 1 μbar est de 10^{-6} kg/m^3 (bon vide de laboratoire)

La masse volumique de l'air sous 1 pbar est de 10^{-12} kg/m^3 (ultra vide de laboratoire)

Il faut voir que lorsque l'on atteint le meilleur vide que l'on puisse produire sur la terre (ultra vide de laboratoire), il reste encore 2 millions de molécules par cm^3 , (2×10^{12} molécules par m^3). On est loin d'atteindre le vide qui règne dans l'espace.

(1) $N = 6,02 \times 10^{23}$ est le nombre d'Avogadro

Pour l'espace

Vide interplanétaire : 5 particules par cm^3 (5×10^6 particules par m^3)

Vide intersidéral : 1 particule par cm^3 (10^6 particules par m^3)

Vide intergalactique : 5 particules par m^3

La distribution de la matière dans le vide intersidéral est assez inégale.

Elle peut atteindre de 10^3 à 10^5 atomes par cm^3 dans les nuages, mais elle est de 0,01 atome par cm^3 (10^4 atomes par m^3) dans l'espace compris entre les nuages.

Pour Antares dans la constellation du scorpion

Il peut être intéressant, pour voir où nous nous plaçons, de calculer la densité d'Antares. Antares est une étoile rouge, l'une des plus grosses étoiles connues, de 17 masses solaires et de 4 unités astronomiques de rayon. Autrement dit, mise à la place du soleil, Antares engloberait l'orbite de Mars. [Remarque : la plus grosse étoile connue est deux fois plus grosse qu'Antares ; elle répond au nom peu poétique de UY *Scuti*, c'est pour cela que nous avons préféré Antares !]

$$d_{\text{Ant}} = [34 \times 10^{30}] / [4/3 \pi (6 \times 10^{11})^3] = 3,76 \times 10^{-5} \text{ kg/m}^3$$

Autrement dit, Antares a la densité de l'air sous 1 Pa, ce qui est la pression qui règne au dessus de Pluton. La température superficielle d'Antares est de 3500 K, ce qui la fait paraître rouge, et elle augmente au fur et à mesure que l'on s'enfonce. Antares est néanmoins 150 000 fois plus lumineuse que le soleil. Il ne faut donc pas comparer Antares et Pluton. De plus, l'essentiel de la masse d'Antares est située au centre de telle sorte la densité est encore plus faible que la densité calculée. Antares est une grosse boule de gaz très dilué qui n'est visible que grâce à sa température. Il ne faut néanmoins pas s'illusionner : une planète ne peut pas circuler à l'intérieur de l'étoile, car nous avons vu que dans un ultra vide de laboratoire (correspondant à peu près à la pression qui existe à l'intérieur d'Antares), il circule à peu près 2 millions de particules à plus de 3500 K. Dans ces conditions, une planète ne subsisterait que fort peu de temps à l'intérieur de l'étoile et se retrouverait rapidement vaporisée au centre.

Pierre Perrot
perrot9@gmail.com
