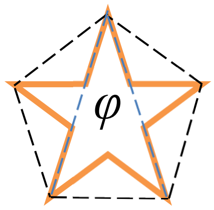
Des fractions continues au nombre d'or



C'est quoi une fraction continue ?

Pour écrire un nombre, on peut utiliser bêtement la notation décimale, par exemple 3,14159265…, mais on peut l'écrire sous la forme beaucoup plus amusante d'une *fraction continue* :

$$n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ldots}}}}$$

Le terme a_0 peut être positif, négatif ou nul ; tous les autres termes sont positifs. Comme un tel échafaudage prend un peu de place, on préfère écrire :

$$n = (a_0\ ;\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ ,\ a_4\ ,\ \ldots)$$

Si le nombre n est rationnel, le nombre de a_i est limité ; s'il est *irrationnel*, il est infini.
Prenons par exemple le rationnel $n = 83945/25936$. Il est facile* de faire la transformation :

$$n = \frac{83945}{25936} = 3 \times 25936 + 6137 = 3 + \frac{6137}{25936} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{25936}{6137}} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1388}{6137}} = etc..$$

On tombe facilement sur l'expression de n sous forme d'une *fraction continue* : $n = (3\ ;\ 4, 4, 2, 2, 1, 2, 6, 3, 1, 2)$

La méthode est exactement la même pour un nombre *irrationnel,* le problème étant qu'il faut prendre beaucoup de décimales si l'on veut pousser loin le développement en fraction continue. Celui du nombre π est intéressant :

$$\pi = 3{,}1415926536..$$
$$\pi = 3 + 0{,}1415926536$$
$$= 3 + \frac{1}{7{,}062651....} = 3 + \frac{1}{7+0{,}06251...} = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15{,}99659...}} = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+0{,}99659}}$$

Le nombre π peut être ainsi approché par une fraction qui représente le nombre π d'une façon d'autant plus précise que l'on pousse le développement loin. Si on arrête le développement au premier terme, on obtient naturellement π = 3, mais c'est un peu court ! Au deuxième terme, on obtient π = 22/7 = 3,1428 (deux décimales exactes), puis π = 333/106 = 3,14150 (trois décimales exactes), puis π = 355/113 = 3,1415929 (5 décimales exactes) et enfin : π = 103993/33102 = 3,1459265301 avec 8 décimales exactes. Lorsque l'on a la chance de tomber sur un nombre relativement important dans le développement (ici : 292), on augmente considérablement le nombre de décimales exactes.

$$\boldsymbol{\pi = 3 +} \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\ldots}}}}$$

$$\frac{22}{7} \qquad \frac{333}{106} \qquad \frac{355}{113}$$

π = (**3 ; 7, 15, 1**, 292, 1, 1, 1, 2, …)

Voici d'autres développements en fraction continue :

$\sqrt{2}$ = (1 ; 2 ,2 ,2, 2, . . .)
$\sqrt{3}$ = (1 ; 1, 2, 1, 2, . . .)

Le nombre exponentiel e = 2,7182818284 . .

$$\boldsymbol{e} = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ldots}}}}}$$

(*) presque facile !

Le nombre de Champernowne

C'est le nombre C_{10} = 0,12345678910111213141516 … ! Vous allez me dire que *Champernowne* (1912-2000) ne s'est pas trop cassé la tête pour l'inventer, mais, ce nombre s'est fait une réputation dans le Landerneau des mathématiciens, à cause de son développement en fraction continue :

$$C_{10} = (0\,;\,8, 9, 1, 149\,083, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 3, 4, 1, 1, 1, 15, \boldsymbol{K}, 6, 1, 1, 21, \cdots)$$

Le nombre $a_{18} = K$ possède 166 chiffres ! Si l'on arrête le développement au chiffre 15, on obtient la constante avec 190 décimales, tandis que si on l'arrête au chiffre *K*, la constante obtenue devient exacte avec 356 décimales. Ensuite, les nombres de a_{19} à a_{39} suivent un cours plus acceptable, ne comprenant au maximum, que 3 chiffres :

6, 1, 1, 21, 1, 9, 1, 1, 2, 3, 1, 7, 2, 1, 83, 1, 156, 4, 58, 8, 54

Mais le terme a_{40} a 2504 chiffres ; le terme a_{162} a 33102 chiffres ; le terme a_{526} a 411 100 chiffres ; le terme a_{1708} a 4 911 098 chiffres ; le terme a_{4838} a 57 111 096 chiffres ; le terme a_{13522} a 651 111 094 chiffres ; le terme a_{34602} a 7 311 111 092 chiffres ! L'augmentation du nombre de « 1 » dans la série a été observée en 2012. Si l'on prend les trois derniers chiffres, la suite 104, 102, 100, 098, 096, 094, 092 est également remarquable.

Enfin, le nombre de *Champernowne* est un nombre *univers,* ce qui signifie que n'importe quelle suite finie se retrouve une infinité de fois. Cette propriété est partagée par le nombre π, mais pour le nombre π, il s'agit seulement d'une conjecture, qui n'a pas encore été démontrée.

On en arrive au nombre d'or

On appelle « nombre d'or » (φ) le rapport de deux longueurs *a* et *b* tel que : $\boldsymbol{(a + b) / a = a / b = \varphi}$

ce qui revient à résoudre l'équation : $1 + 1 / \varphi = \varphi$, soit : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, équation du 2° degré, dont la racine positive est :

$$\boldsymbol{\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1{,}618\,033\,988\,7\ldots}$$

Pour retrouver le nombre d'or dans le Parthénon,
il faut utiliser des conventions assez peu naturelles !

C'est çà le « nombre d'or », appelé φ en l'honneur de *Phidias*, architecte grec à qui on doit la construction du *Parthénon* et qui l'a, paraît-il introduit un peu partout dans ses constructions, parce que ce nombre, que l'on appelait à l'époque la « divine proportion » représentait la quintessence du beau.

En réalité, il faut beaucoup de bonne volonté pour le voir et, avec un effort supplémentaire, on peut le voir dans la grande pyramide, la Vénus de Milo, l'homme de Vitruve (dessiné par Léonard de Vinci). Les mauvaises langues disent que, si on avait voulu chercher $\sqrt{69}$ dans le Parthénon, on l'aurait certainement trouvé ! Bon !

On le retrouve bien dans les tableaux de *Salvator Dali*, mais ce dernier ne l'a introduit que pour s'en moquer ! Il paraît qu'on le retrouve dans le corps humain : il suffit de prendre le rapport entre sa taille et la hauteur, par rapport au sol, de son nombril pour le retrouver.

Fier comme un petit banc de ma découverte, je l'ai essayé sur moi et je trouve un rapport de 1,67 ce qui n'est pas tout à fait le nombre d'or, mais presque. Donc, si je ne suis pas du genre Apollon, il s'en faut de peu !

Présentation plus drôle du nombre d'or :

Bref ! Si ce rapport se retrouve partout (pour ceux qui y croient) ou nulle part (pour ceux qui n'y croient pas), quel peut être son intérêt ? Si l'on excepte le fait que c'est un des premiers nombres dont l'irrationalité ait été démontrée (il y a 2500 ans), l'une des caractéristiques du nombre d'or est qu'il peut se représenter simplement de deux façons différentes, soit à partir d'une *fraction continue*, soit à partir de *radicaux imbriqués* : en effet, partons de la définition : $\varphi = 1 + (1/\varphi)$. En remplaçant dans le deuxième membre φ par sa valeur :

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varphi}}}}$$

En continuant l'opération jusqu'à l'infini, on obtient la fraction continue :
$\varphi = (1 ; 1, 1, 1, 1, \ldots)$
En procédant de la même manière, mais à partir de $\varphi^2 = 1 + \varphi$, ou $\varphi = \sqrt{1 + \varphi}$, on obtient

$$\varphi = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 +}}}$$

Où l'on voit apparaître Fibonacci :

De l'équation de définition du nombre d'or $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, on tire $1/\varphi = \varphi - 1$, autrement dit, pour prendre l'inverse du nombre d'or, il suffit de lui retirer 1 : $1/\varphi = 0,618 \ldots$

De la même équation, on tire : $\varphi^2 = \varphi + 1$, autrement dit, pour prendre le carré du nombre d'or, il suffit de lui ajouter 1 : $\varphi^2 = 2,618 \ldots$ Et maintenant :

$$\varphi^3 = \varphi^2 + \varphi = 2\,\varphi + 1$$
$$\varphi^4 = 2\,\varphi^2 + \varphi = 2\,\varphi + 2 + \varphi = 3\,\varphi + 2$$
$$\varphi^5 = 3\,\varphi^2 + 2\,\varphi = 3\,\varphi + 3 + 2\,\varphi = 5\,\varphi + 3$$
$$\varphi^6 = 5\,\varphi^2 + 3\,\varphi = 5\,\varphi + 5 + 3\,\varphi = 8\,\varphi + 5$$
$$\varphi^7 = 8\,\varphi^2 + 5\,\varphi = 8\,\varphi + 8 + 5\,\varphi = 13\,\varphi + 8$$

Tiens ! On voit apparaître la suite de *Fibonacci* (1175-1250), suite de nombre dont chaque terme est la somme des deux précédents. En partant de 1 – 1, on obtient :

1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55 – 89 – …

Ce qu'il y a de remarquable dans cette suite, c'est que si l'on fait le rapport de deux nombres consécutifs, on tend vers le nombre d'or. Bien sûr, avec les premiers termes, ce n'est pas tout à fait exact, mais on arrive rapidement au nombre d'or avec une excellente précision. Déjà, si l'on fait 89/55, on obtient 1,618 18…, ce qui est précis à 1 pour mille. Remarquons que ceci est vrai quels que soient les nombres de départ. Par exemple, en partant de 75 et 102, on obtient : 75, 102, 177, 279, 456, 735, 1191, 1926, ... Le rapport de deux nombres consécutifs tend rapidement vers le nombre d'or : 1926/1191 = 1,617 128 … !

Leonardo Fibonacci
dit Léonard de Pise (1175-1250)

Fibonacci n'est pas tombé sur cette suite en s'intéressant au nombre d'or, mais à la croissance d'une population de lapins. Si l'on considère qu'un couple de lapins n'a pas de descendance le premier mois, mais produit un couple de lapins les mois suivants, le nombre de couples de lapins présents au mois n° *n* est représenté par la suite de *Fibonacci* : 1 couple le 1° mois, 1 couple le 2° mois, 2 couples le 3° mois, 3 couples le 4° mois, 5 couples le 5° mois, 8 couples le 6° mois, etc. Le calcul est facile à faire.

Relations entre φ et π :

Voici par exemple quelques relations, dues à *Ramanujan*, mathématicien indien (1887-1920), entre une fonction de φ et un développement en fraction continue de π :

$$\sqrt{\varphi + 2} - \varphi = e^{-2\pi/5} / (1 + e^{-2\pi} / (1 + e^{-4\pi} / (1 + e^{-6\pi} / (1 + e^{-8\pi} \cdots)$$

Si l'on veut extraire π de cette relation (bon courage) pour l'exprimer en fonction de φ sous forme d'un développement infini :

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} [(\varphi - 1)^{2k+1} + (2\,\varphi - 3)^{2k+1}]$$

Si on limite le développement au premier terme ($k = 0$), on obtient :

$$\pi \approx 4\,(3\,\varphi - 4) = 3{,}416$$

- -

Formule de Ramanujan

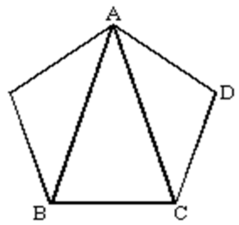
$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \times \frac{1103 + 26390n}{(4 \times 99)^{4n}}$$

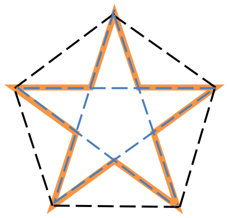
- -

Une relation évidente entre **φ et π** provient du fait que dans un pentagone régulier, le rapport d'une diagonale à un coté du pentagone est égal au nombre d'or (AB / BC = ϕ). L'angle BCA est de 36° ;

En traçant les 5 diagonales du pentagone régulier, on obtient une étoile à 5 branches.
Le rapport d'un côté de l'étoile à un côté du pentagone est égal au nombre d'or.

$$\boxed{\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \varphi}$$





a

Mesurer et faire le calcul :

a = ... cm
b = ... cm

φ = a/b = ...

b

Et ...pour M. D'ARSONVAL, un diplôme aux dimensions du nombre d'or !*

(*) diplôme conservé au Collège de France

Pierre Perrot
perrot9@gmail.com